数理解析研究所講究録 1205 巻 2001 年 131-135

MAX DICUT問題の近似解法

東京大学工学系研究科計数工学専攻 松浦 史郎 (Shirou Matsuura)
Department of Mathematical Engineering and Information Physics,
University of Tokyo.
東京大学工学系研究科計数工学専攻 松井 知己 (Tomomi Matsui)
Department of Mathematical Engineering and Information Physics,
University of Tokyo.

概 要

MAX DICUT 問題に対して Goemans&Williamson が与えた近似解法は近似比 0.796 であった. その後 Feige&Goemans が0.859-近似を与えた. 本研究では Feige&Goemans が示唆した別の解法に対する解析を行なった. またそれに基づき 0.862-近似解法を与えた.

1 問題の定式化とGoemans&Williamsonによる近似解法, 及びFeige&Goemansによる改善

MAX DICUT

Input:	$D = (V, A)$	グラフ
	$V = \{1, 2, \ldots, n\}$	頂点集合
	$A = \{(i,j) \mid i \in V, j \in V\}$	辺集合
	$w_{ij} (\geq 0)$	辺 (i,j) の重み

$$
\begin{array}{lll}
\text{(DI)} & \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{i \in U, j \in V \setminus U} w_{ij}, \\
& \text{subject to} & U \subseteq V.
\end{array}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(DI')} & \text{Maximize} & \displaystyle\frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij}(1+v_0v_i-v_0v_j-v_iv_j),\\
& \text{subject to} & v_0=1,\\
& & v_i\in\{-1,1\}\ \ \forall i\in V.
\end{array}
$$

Goemans&Williamson による緩和をおこなう.

$$
\begin{array}{lll}
(\overline{\text{DI}}) & \text{Maximize} & \displaystyle\frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij}(1+\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j),\\
& \text{subject to} & \boldsymbol{v}_0=(1,0,\ldots,0)^t,\\
& & \boldsymbol{v}_i\in\boldsymbol{S}^n\ \ \forall i\in V\cup\{0\}.
\end{array}
$$

$\{-1,1\}$ を取る変数を, $n+1$ 次元超球の表面上の任意の点を取る変数と置き変えている
これは SDP として扱え, 多項式時間で解く事が出来る.

近似比の計算

$(\overline{\boldsymbol{v}}_1,\overline{\boldsymbol{v}}_2,\ldots,\overline{\boldsymbol{v}}_n):(\overline{\text{DI}})$ の最適解

に対し, $\boldsymbol{r}\in\boldsymbol{S}^n$ である $\boldsymbol{r}$ を超球面上一様ランダムに発生させ,

$$U=\{i|\text{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_0)=\text{sign}(\boldsymbol{r}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_i)\}$$

とする. この U による (DI) の目的関数値の ($\boldsymbol{r}$ の分布による) 期待値 E は,

$$E \;=\; \sum_{i,j} w_{i,j}\frac{\arccos(\overline{\boldsymbol{v}}_i\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_j)+\arccos(\boldsymbol{v}_0\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_j)-\arccos(\boldsymbol{v}_0\cdot\overline{\boldsymbol{v}}_i)}{2\pi}.$$

ここで,

$$\alpha=\min_{\overline{\boldsymbol{v}}_i,\overline{\boldsymbol{v}}_j\in\boldsymbol{S}^n}\frac{E\text{ の各 }i,j\text{ に関する項}}{(\overline{\text{DI}})\text{ の目的関数の各 }i,j\text{ に関する項}}$$

とすると, $\alpha=0.79607\cdots$ であり, これが近似比である.

Feige&Goemans による改善

$(\overline{\text{DI}})$ に以下の制約式を追加.

$$
\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_j+\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j & \geq & -1,\\
-\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_j+\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j & \geq & -1,\\
-\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_j & \geq & -1.
\end{array}
$$

これだけでは向上しないので, $\boldsymbol{v}_0$ の特殊性に着目.
$\boldsymbol{v}_0$ と近い頂点は U に入って欲しい.
→ 各 $\overline{\boldsymbol{v}}_i$ について, $\boldsymbol{v}_0$ と成す角によって $\boldsymbol{v}_0$ に近づく/遠ざかる方向に動かす. …「shift」

「shift」による近似比

θ : $\boldsymbol{v}_0$と$\overline{\boldsymbol{v}}_i$の成す角

θ' : $\boldsymbol{v}_0$と「shift」後の$\overline{\boldsymbol{v}}_i$の成す角

$\theta' = \frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{2}(1 - \cos\theta))$ とすると, 近似比 0.857 を達成. より込み入った変換を行なう事によって近似比 0.859 を達成.

2 一様では無い分布による方法

「shift」するかわりに切断超平面の発生確率をいじったらどうか?

- 法線と $\boldsymbol{v}_0$ との成す角によって発生確率を変える.
- ある角の中では ($\boldsymbol{v}_0$ と垂直な方向では) 一様分布.

この様にすれば良さそうであるが, 問題がある.
$\boldsymbol{v}_0, \overline{\boldsymbol{v}}_i, \overline{\boldsymbol{v}}_j$ が張る球面上で考えたいが, この上で任意の分布関数を実現できるわけではない!

確率分布の高次元から 3 次元へのの射影

特別な ($\boldsymbol{S}^n$ 上の) 分布関数においてなら, $\boldsymbol{S}^2$ 上に射影した時の分布関数が計算できる.

> 定理
> $P(\theta)$ を $\boldsymbol{S}^n$ 上で $\boldsymbol{r}_0$ と成す角が θ である $\boldsymbol{r}$ を発生する単位面積当りの確率とする. $P(\theta)$ が
>
> $$P(\theta) = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos^k\theta$$
>
> とあらわせる場合, $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{v}_0$ を含む 3 次元球面に射影し $\boldsymbol{v}_0$ となす角が ϕ となる (3 次元球面上の) 単位面積当りの確率 $Q(\phi)$ は,
>
> $$Q(\phi) = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k+n)}(1)}{S^{(k+2)}(1)} a_k \cos^k\phi$$
>
> となる.

a : 正規化係数

$S^n(r)$: 半径 r の $(n+1)$ 次元超球の表面積

$$\Gamma(0)=1,\quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\cos^q x dx=\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{2\Gamma(\frac{p+q+2}{2})}.$$

$$S^n(r)=\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

ϕ(と $d\phi$) を固定する．$r\sim r+dr$ である部分 (図の斜線部) に射影される，(天頂角が $\theta-d\theta\sim\theta$ である) 球面上の部分の面積は，

(半径 $r\sin\phi$ の円) × (半径 $\sqrt{1-r^2}$ の $(n-2)$ 次元超球面)
× ($d\phi$による厚み) × (dr による厚み)

である．

よって，

$$2\pi\sin\phi Q(\phi)d\phi=$$
$$\int_0^1(2\pi r\sin\phi)(S^{(n-3)}(\sqrt{1-r^2}))(\frac{\sqrt{1-r^2\cos^2\phi}}{\sqrt{1-r^2}}r\frac{d\phi}{\cos\phi})(\frac{\cos\phi}{\sqrt{1-r^2\cos^2\phi}}dr)P(\arccos(r\cos\phi)),$$

より，

$$Q(\phi)=\int_0^1 P(\arccos(r\cos\phi))S^{(n-3)}(\sqrt{1-r^2})r^2\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}},$$

とわかる．

$r=\sin\alpha$ と変数変換し，$P(\theta)=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos^k\theta$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
Q(\phi) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sin^k\alpha\cos^k\phi)\frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}\cos^{n-3}\alpha\sin^2\alpha d\alpha \\
&= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}a_k\cos^k\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k+2}\alpha\cos^{n-3}\alpha d\alpha \\
&= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}a_k\cos^k\phi\frac{\Gamma(\frac{k+3}{2})\Gamma(\frac{n-2}{2})}{2\Gamma(\frac{n+k+1}{2})} \\
&= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{k+3}{2})}{2\pi^{\frac{k+3}{2}}}\frac{2\pi^{\frac{n+k+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+k+1}{2})}a_k\cos^k\phi \\
&= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S^{2+k}(1)}{S^{n+k}(1)}a_k\cos^k\phi,
\end{aligned}$$

となる．□

3 次元から任意次元に戻す

定理から次の補題が成り立つ.

補題

$Q(\phi)$ を $\boldsymbol{S}^2$ 上で $\boldsymbol{r}_0$ と成す角が ϕ である $\boldsymbol{r}$ を発生する単位面積当りの確率とする. $Q(\phi)$ が

$$Q(\phi) = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos^k \phi \quad (b_k \geq 0)$$

とあらわせるならば, $n+1$ 次元球面に持ち上げた時に $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}_0$ とがなす角が θ となる単位面積当りの確率 $P(\theta)$ は,

$$P(\theta) = \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k+2)}(1)}{S^{(k+n)}(1)} b_k \cos^k \theta$$

となり, 任意の n, θ に対して $P(\theta) \geq 0$ となる事を保証できる.

数値実験

$\boldsymbol{v}_0, \overline{\boldsymbol{v}}_i, \overline{\boldsymbol{v}}_j$ のなす角は $[0,\pi]$ の間を 64 等分に区切り, さらに良い値の周囲を 64 等分に区切り、また良い値の周囲を 64 等分に区切って探索した.

数値積分部分については $[0,\pi/2]$ の間を 4096 等分し下限を取るように計算した.

$Q(\phi)$ について, $\cos\phi$ の 2 次の項までに制限して探索した場合 Q の係数については, 合計 3 として, 0.0001 刻みで調べた.

結果：$Q(\phi) = 1.140400 + 0.775400\cos\phi + 1.084200\cos^2\phi$ → 近似比 0.859.

$Q(\phi)$ を $\sqrt{\cos\phi}$ とした場合

結果：近似比 0.862.

参考文献

[1] U. Feige and M. X. Goemans, "Approximating the Value of Two Prover Proof Systems, With Applications to MAX 2SAT and MAX DICUT", *Proc. of 3rd Israel Symposium on the Theory of Computing and Systems*, 182–189, 1995.

[2] M. X. Goemans and D. P. Williamson, "Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems Using Semidefinite Programming", *Journal of the ACM*, 42(1995), 1115-1145.